പിതൃത്വം പിഴച്ച പ്രമാണങ്ങൾ

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ പല സിദ്ധാന്തങ്ങളും ഇന്നറിയപ്പെടുന്നത് യഥാർഥ പിതാക്കന്മാരുടെ പേരിലല്ല. എന്തിന് "ശാസ്ത്രീയമായ ഒരു കണ്ടുപിടുത്തവും കണ്ടുപിടിച്ചയാളുടെ പേരിലല്ല അറിയപ്പെടുക" എന്ന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പിതാവും മറ്റൊരാൾ. അങ്ങനെ വരികിൽ ഗണിതചരിത്രവഴിയിൽ സത്യമെത്ര? മിഥ്യയെത്ര?

ഗുരുകുലം

ശാസ്ത്രപ്രമാണങ്ങളുടെ പിതൃത്വം നിശ്ചയിക്കുന്നത് രണ്ടു കാര്യങ്ങളം നോക്കിയാണ്. ആരാണ് അത് ആദ്യം പറഞ്ഞതെന്നു നോക്കിയും, ആരാണ് അത് ആദ്യം തെളിയിച്ചതെന്നു നോക്കിയും. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ പൊതുവെ തെളിയിച്ച ആളിന്റെ പേരിലാണ് സിദ്ധാന്തങ്ങളൊക്കെ. വളരെക്കാലം തെളിയിക്കപ്പെടാതെ കിടന്ന പല സിദ്ധാന്തങ്ങളും ആദ്യം പറഞ്ഞവരുടെ പേരിലും അറിയപ്പെടാറുണ്ട്. ഫെർമയുടെ അന്ത്യസിദ്ധാന്തം (Fermat's last theorem) ഒരുദാഹരണം.

ഈ പ്രശ്നം സംഭവിച്ച ഒരു പഴയ സിദ്ധാന്തമാണ് മട്ടത്രികോണ സിദ്ധാന്തം. അതായത്, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ (Right angled triangle) കർണം വശമായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചാൽ അതിന്റെ വിസ്താരം മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളിലും വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്താരത്തിന്റെ തുകയോടു തുല്യമാണെന്നുള്ള സിദ്ധാന്തം. ഇതിന്റെ പിതൃത്വം ഗ്രീക്ക് ഗണിതജ്ഞനായിരുന്ന പിഥഗോറസിൽ (Pythagoras-ക്രി. മു. ആറാം ശതകം) ആണ് കെട്ടിവെച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ സിദ്ധാന്തം ആദ്യമായി തെളിയിച്ചത് ഗ്രീക്ക് ഗണിതജ്ഞനായിരുന്ന യൂക്ലിഡ് (ക്രി. മു. നാലാം നൂറ്റാണ്ട്) ആണ്. (ക്രി. മു. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ എഴുതപ്പെട്ട ആപസ്തംബ ശൂൽബ സൂത്രത്തിൽ ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാമിതീയ ഉപപത്തിയുണ്ട്. പക്ഷേ, ആപസ്തംബ ശൂൽബ സൂത്രത്തിന് അത്ര പഴക്കമില്ല എന്നൊരു വാദമുണ്ട്. അതിനാൽ ആദ്യം ഇതു തെളിയിച്ചത് യൂക്ലിഡ് ആണെന്നു തന്നെ പറയാം.)

ആദ്യമായി ആരാണിതു പറഞ്ഞത് എന്നു ചോദിച്ചാൽ അതൊരു കഥയാണ്.

പിഥഗോറിയൻ ത്രയങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്ന സംഖ്യാത്രയങ്ങളെപ്പറ്റി (3, 4, 5; 5, 12, 13 തുടങ്ങിയവ) ക്രിസ്തുവിനു നാൽപതു നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കു മുമ്പേ മനുഷ്യർക്കറിയാമായിരുന്നു എന്നാണു വിക്കിപീഡിയ പറയുന്നത്. ഏതായാലും പിരമിഡുകൾ നിർമിച്ച ഈജിപ്തുകാർ മട്ടകോണം ഉണ്ടാക്കാൻ ഇത്തരം സംഖ്യാത്രയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു എന്നാണു വിദഗ്ധമതം.

ഈ സിദ്ധാന്തം ആദ്യമായി പറഞ്ഞത് ഭാരതത്തിൽ വേദകാലഘട്ടത്തിൽ (ഇതിനെയാണ് Vedic Mathematics എന്നു വിളിക്കേണ്ടത്; അല്ലാതെ പുരി ശങ്കരാചാര്യർ അടുത്ത കാലത്തെഴുതിയെന്നു പറയപ്പെടുന്ന തട്ടിപ്പിനെയല്ല.) ശൂൽബസൂത്രങ്ങളിലൊരെണ്ണം എഴുതിയ ബൗധായനനാണ്. (ക്രി. മു. പത്താം നൂറ്റാണ്ട്). ആപസ്തംബശൂൽബസൂത്രത്തിൽ ഇങ്ങനെ പറയുന്നു:

സമചതുരശ്രസ്യക്ഷ്ണയാ രജ്ജു ദ്വിഷ്ടാവതിം ഭൂമിം കരോതി

സമചതുരത്തിന്റെ കർണം വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്താരം ഇരട്ടിയായിരിക്കും എന്നർഥം.

കൂടാതെ, ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിനും ഇതു ബാധകമാണെന്നും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്:

ദീർഘചതുരശ്രസ്യക്ഷ്ണയാ രജ്ജുഃ പാർശ്വമാനി തിര്യന്മാനി ച യത്പൃഥഗ്ഭൂതേ കുരുതസ്തദുഭയം കരോതി

ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണം കൂട്ടിയാൽ കർണത്തിന്റെ സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണമാകും എന്നർത്ഥം.

ഇതു തന്നെ മട്ടത്രികോണസിദ്ധാന്തം. ശൂൽബസൂത്രമാണെന്നു തോന്നുന്നു ആദ്യമായി ഇതു രേഖപ്പെടുത്തിയത്. (ഒരു പക്ഷേ, അതിനു മുൻപു തന്നെ ഇതിനെപ്പറ്റി അറിവുണ്ടായിരുന്നിരിക്കണം.) ആദ്യം തെളിയിച്ചതു യൂക്ലിഡും. രണ്ടായാലും പിഥഗോറസ്സിന്റേതല്ല.

പെൽ സമവാക്യം എന്നു വിളിക്കുന്ന ഒന്നുണ്ട് സംഖ്യാശാസ്ത്രത്തിൽ. $x^2-Dy^2=\pm 1$ എന്നതാണത്. ഇവിടെ x, y എന്നിവ പൂർണസംഖ്യകളായി കണ്ടുപിടിക്കണം. D തന്നിട്ടുള്ള, പൂർണവർഗമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയാണ്. (പൂർണവർഗമാണെങ്കിൽ x, y ഇവയ്ക്ക് 1, -1, 0 എന്നീ മൂല്യങ്ങളേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ.)

പ്രശസ്ത ഗണിതജ്ഞനായിരുന്ന ഓയ്‌ലർ (Leonard Euler) ആണ് ഇതിനെ ജോൺ പെൽ എന്ന ഗണിതജ്ഞനുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയത്. ഒരു സുപ്രഭാതത്തിൽ ഇതു കണ്ട പെൽ അമ്പരന്നിട്ടുണ്ടാവണം. കാരണം, ഇതിന്റെ തിയറിക്ക് പെൽ കാര്യമായി ഒന്നും ചെയ്തിട്ടില്ല എന്നതാണ് വാസ്തവം.

ഇത് വളരെ പഴയ പ്രശ്നമാണ്. ആർക്കിമിഡീസിന്റെ കന്നാലിച്ചോദ്യം വിശകലനം ചെയ്താൽ (ഇത് ആർക്കിമിഡീസിന്റേതാണോ എന്നു പലർക്കും സംശയമുണ്ട്.)

$$x^2-410286423278424y^2=1$$

എന്ന സമവാക്യം കിട്ടും. ആർക്കിമിഡീസിന്റെ കാലത്ത് ഇതു നിർധരിക്കാൻ കഴിയുമായിരുന്നു എന്നു തോന്നുന്നില്ല. പിന്നീടും ഗണിതജ്ഞർ പരസ്പരം മത്സരബുദ്ധ്യാ ഇത് നിർധരിക്കാനുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ ഇടുമായിരുന്നു.

ഇത് നിർധരിക്കാനുള്ള പൂർണമായ വഴി ആദ്യമായി പറഞ്ഞതു ലെഗ്രാൻഗെ (പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ട്) ആണെന്നാണു പാശ്ചാത്യഗണിതചരിത്രം പറയുന്നത്. തുടർഭിന്നങ്ങൾ (continued fractions) ഉപയോഗിച്ച് ഇതിന്റെ കൃത്യവും സമഗ്രവുമായ ഒരു നിർധാരണരീതി അദ്ദേഹം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. പെല്ലിനു പകരം ഇദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരാണ് വരേണ്ടിയിരുന്നത്.

പിതൃത്വം പിഴച്ചെന്ന് പാശ്ചാത്യർ സമ്മതിക്കുന്ന ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പിതൃത്വം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിൽ അവർ ഒന്നുകൂടി പിഴച്ചു എന്നതാണ് സത്യം. ക്രി. പി. ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ ഈ സമവാക്യം നിർധരിക്കാൻ ഒരു വഴി കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു. പിന്നീട് ഭാസ്കരാചാര്യർ (പന്ത്രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ട്) അതിനെ പരിഷ്കരിച്ച് സരളമാക്കി. 'ചക്രവാളരീതി' എന്നാണ് അതിന്റെ പേർ. (ഞാൻ ഭാസ്കരാചാര്യരെ മാത്രമേ വായിച്ചിട്ടുള്ളൂ. ബ്രഹ്മഗുപ്തന്റെ കൃതികളൊന്നും കണ്ടിട്ടില്ല.)

ചക്രവാളരീതി വിശദീകരിക്കാൻ ഒരു വലിയ പോസ്റ്റ് തന്നെ വേണം. അതു മറ്റൊരിക്കലാവാം. എങ്കിലും ഇത്രയും പറയട്ടേ.

ഒരു കരണിയുടെ (surd) തുടർഭിന്നവികസനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രരീതിയുണ്ട്. ഇതും ലെഗ്രാൻഗെ കണ്ടുപിടിച്ചതു തന്നെ. (ഒരു റെഫറൻസു തരാൻ ഇൻറർനെറ്റിൽ ഇതു കാണുന്നില്ല.) മുകളിൽക്കൊടുത്ത സമവാക്യത്തിന്റെ നിർധാരണത്തിൽ ഈ രീതി

ഫെർമ

പിഥഗോറസ്

ഉപയോഗിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന രീതി തന്നെയാണ് ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ ചക്രവാളരീതി. ഭാസ്കരാചാര്യർക്ക് തുടർഭിന്നങ്ങളെപ്പറ്റിയും അവ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സരളരീതിയെപ്പറ്റിയും അറിയാമായിരുന്നു എന്നാണ് ഇതിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കേണ്ടത്.

ഭാരതീയാചാര്യന്മാർ കണ്ടുപിടിച്ച എന്തെങ്കിലും ഒരു കാര്യം ഉദ്ധരിച്ച് അതിനു പിന്നിലുള്ള എല്ലാ തിയറിയും അവർക്കറിയാമായിരുന്നു എന്നു പറയുന്ന ഒരു പ്രവണതയുണ്ട്. (വിമാനവും ആറ്റം ബോംബും ഉദാഹരണം. സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ തെളിവുകൾ മറ്റൊന്ന്.) ഇത് അത്തരത്തിലൊന്നല്ല എന്നു പറഞ്ഞുകൊള്ളട്ടെ. തുടർഭിന്നങ്ങളെപ്പറ്റി അറിയാതെ ചക്രവാളരീതി എങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കും എന്നതിന് എനിക്ക് ഒരു വിശദീകരണവും തോന്നുന്നില്ല. എങ്കിലും ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഇതിനെ ഇപ്പോഴും Pell's equation എന്നു വിളിക്കുന്നു.

Binomial coefficients ക്രമമായി കിട്ടാൻ ബ്ലെയ്സ് പാസ്കൽ പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കണ്ടുപിടിച്ച ഒരു സൂത്രമുണ്ട്. പാസ്കൽ ത്രിഭുജം എന്നാണ് അതറിയപ്പെടുന്നത്. ഇത് പിംഗള സൂത്രങ്ങളുടെ വ്യാഖ്യാതാവായ ഹലായുധന് (പത്താം നൂറ്റാണ്ട്) ഖണ്ഡമേരു (മേരുപ്രസ്തം) എന്ന പേരിൽ പറയുന്നുണ്ട്. ഓരോ ഛന്ദസ്സിലും നിശ്ചിത എണ്ണം ഗുരു (അല്ലെങ്കിൽ ലഘു) വരുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാനാണ് ഇതുപയോഗിക്കുന്നത്. പാസ്കൽ ത്രിഭുജത്തിന്റെ രൂപത്തിലല്ലെങ്കിലും ഇതേ കാര്യം തന്നെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പിംഗളൻ (ക്രി. മു. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ട്) തന്നെ മാർഗം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. ഇവയെപ്പറ്റി വിശദമായ ഒരു ലേഖനം (ഈ ലേഖനത്തിന്റെ രണ്ടാം ഭാഗം) എഴുതാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നതുകൊണ്ട് കൂടുതലായി ഇവിടെ വിശദീകരിക്കുന്നില്ല.

ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പാസ്കൽ തന്നെ കണ്ടുപിടിച്ചതും പിന്നീട് ഐസക് ന്യൂട്ടൻ സാമാന്യവത്കരിച്ചതുമായ Binomial theorem പിംഗളന്റെ സംഭാവനയാണെന്ന് തെറ്റായ ഒരു വാദമുണ്ട്. ഒന്നിലധികം വസ്തുക്കൾ കലരുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യത്യസ്തവിധങ്ങൾ (Combinations) കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള രീതിയാണ് പിംഗളന്റെ കണ്ടുപിടിത്തം. ബൈനോമിയൽ തിയറമാകട്ടേ

$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+.....+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+b^n$

എന്നും. ഇതിന്റെ ഓരോ പദത്തിന്റെയും ഗുണകങ്ങൾ (Coefficients) -${}_nC_r$- കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വഴിയാണ് പിംഗളന്റെ രീതിയിൽ നിന്നു കിട്ടുക. അല്ലാതെ അവയെ $(a+b)^n$ എന്നതിന്റെ വികസനവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന ബൈനോമിയൽ തിയറമല്ല. എങ്കിലും ഈ തെറ്റായ അവകാശവാദം വിക്കിപീഡിയയിലും കാണാം. ഈ ലേഖനത്തിൽ പാസ്കലിനു മുമ്പേ ഇത് പിംഗളനും പിന്നീടു ചൈനീസ് ഗണിതജ്ഞനായിരുന്ന യാങ് ഹുയിയും (പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ട്) പേർഷ്യയിലെ ഒമാർ ഖയ്യാമും (പതിനൊന്നാം നൂറ്റാണ്ട്. റുബായിയാത്ത് എഴുതിയ കവി തന്നെ.അദ്ദേഹം ഗണിതജ്ഞനുമായിരുന്നു.) കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു എന്നും പറയുന്നു. എത്രത്തോളം ശരിയാണെന്നറിയില്ല.

ബെൻഫോർഡ്

മട്ടത്രികോണസിദ്ധാന്തം ആദ്യമായി രേഖപ്പെടുത്തിയത് ആപസ്തംബനാണെന്നു തോന്നുന്നു. (അതിനു മുൻപ് ഇതിനെപ്പറ്റി അറിവുണ്ടായിരുന്നിരിക്കണം.) ആദ്യം തെളിയിച്ചതു യൂക്ലിഡും. രണ്ടായാലും പിഥഗോറസ്സിന്റേതല്ല.

കലനം (Calculus) കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ട പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിനടുത്ത് കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടതെന്നു പറയുന്ന പല അനന്തശ്രേണികളും ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞരുടെ സംഭാവനയാണെന്ന് ഞാൻ നേരത്തേ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. (എന്റെ ഗ്രിഗറിസായ്പും മാധവനും, ഗ്രിഗറി/മാധവശ്രേണിയുടെ സാമാന്യരൂപം, ചില അനന്തശ്രേണികൾ, അനന്തശ്രേണികളുടെ സാധുത എന്നീ ലേഖനങ്ങൾ കാണുക.) അവ മറ്റു പലരുടെയും പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

തിയോഡർ പി. ഹിൽ

നിത്യജീവിതത്തിൽ നിന്നുള്ള കുറേ സംഖ്യകൾ എടുത്തിട്ട് (ഇവ റാൻഡം നമ്പരുകൾ അല്ല എന്നു പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക) അവയുടെ ആദ്യത്തെ (പൂജ്യമല്ലാത്ത) അക്കങ്ങൾ മാത്രം എണ്ണി നോക്കിയാൽ ഏതക്കമായിരിക്കും കൂടുതൽ? 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ഏകദേശം ഒരേ എണ്ണം ഉണ്ടാവുമോ? (ഇതിനോട് സദൃശമായ ഒരു പ്രശ്നം സന്തോഷിന്റെ റാൻഡം നമ്പരുകൾ എന്ന പോസ്റ്റിലുണ്ട്.) അല്ല എന്നാണൊരു കണ്ടുപിടിത്തം. 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ആദ്യത്തെ അക്കമായി വരാനുള്ള സാധ്യത യഥാക്രമം 30.1%, 17.6%, 12.5%, 9.1%, 7.9%, 6.7%, 5.8%, 5.1%, 4.6% ആയിരിക്കുമത്രേ. (മറ്റക്കങ്ങൾക്കും ഇതുപോലെയുള്ള തിയറിയുണ്ട്.)

ഈ സിദ്ധാന്തത്തെ ബെൻഫോർഡിന്റെ നിയമം (Benford's law) എന്നാണു വിളിക്കുന്നത്. ഫ്രാങ്ക് ബെൻഫോർഡ് എന്ന അമേരിക്കൻ ഊർജതന്ത്രജ്ഞൻ 1938ൽ ആദ്യമായി പറഞ്ഞു എന്ന് ചിലർ പറഞ്ഞതു കൊണ്ടാണ് ആ പേരു വന്നത്. എന്നാൽ ഇത് ആദ്യമായി പറഞ്ഞത് 1881ൽ Simon Newcomb ആണ്. ആദ്യമായി തെളിയിച്ചത് Theodore P. Hill എന്ന ഗണിതജ്ഞനും 1988ൽ. (പ്രൊഫ. ഹില്ലിന്റെ പേപ്പറുകൾ ഇവിടെ കാണാം. ഈ സിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റി പല പേപ്പറുകളും അവിടെയുണ്ട്.)

പോല്യ എന്യൂമറേഷൻ തിയറം എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഒരു സിദ്ധാന്തമുണ്ട്. ഹംഗറിയിൽ നിന്ന് അമേരിക്കയിലേക്കു കുടിയേറിപ്പാർത്ത ജോർജ് പോല്യ എന്ന ഗണിതജ്ഞൻ 1936ൽ കണ്ടുപിടിച്ചതു കൊണ്ടാണ് ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന് ഈ പേരു കിട്ടിയത്. ഇതിനും ഒൻപതു കൊല്ലം മുമ്പേ ജെ. എച്ച്. റെഡ്ഫീൽഡ് എന്ന ഗണിതജ്ഞൻ ഇതു കണ്ടുപിടിക്കുകയും അമേരിക്കൻ ജേണൽ ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുകയും ചെയ്തിരുന്നു. ഇങ്ങനെ അനവധിയനവധി സിദ്ധാന്തങ്ങളുണ്ട് കണ്ടുപിടിച്ചവന്റെ പേരിലല്ലാതെ അറിയപ്പെടുന്നവ.

ഇതിന്റെ അങ്ങേയറ്റം 'ശാസ്ത്രീയമായ ഒരു കണ്ടുപിടിത്തവും അതു കണ്ടുപിടിച്ച ആളിന്റെ പേരിലല്ല അറിയപ്പെടുന്നത്' എന്നു പറയുന്ന Stigler's law of eponymy എന്ന സിദ്ധാന്തമാണ്. ഇതിന്റെ ആവിഷ്കാരകനെന്നറിയപ്പെടുന്ന സ്റ്റിഗ്ലർ (ഇദ്ദേഹം യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് ഷിക്കാഗോയിലെ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പ്രൊഫസറാണ്) പറയുന്നത് ഇത് യഥാർഥത്തിൽ ആവിഷ്കരിച്ചത് അമേരിക്കൻ സാമൂഹികശാസ്ത്രജ്ഞനായ Robert K. Merton ആണെന്നാണ്!

ഈ സിദ്ധാന്തം അതിന്റെ തന്നെ ഉദാഹരണമാണെന്നു സാരം.

http://malayalam.usvishakh.net/blog/archives/198